Exercices sur les séries de Fourier

Exercice 1 On considère la fonction f, 2π-périodique telle que $f(x) = 2x$ pour $x \in [0; 2\pi[$.

1. Construire la représentation graphique de la fonction f sur $[-3\pi; 4\pi]$.
2. Déterminer a_0, la valeur moyenne de f sur une période.
3. Démontrer que pour tout entier n non nul, $b_n = -\frac{4}{n}$. On supposera dans la suite de l'exercice que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.
4. On note $S_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} (a_n cos(nt) + b_n sin(nt))$.Donnez $S_4(t)$ en fonction de t.
5. Calculer la valeur de $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2)$ et la comparer au carré de la valeur efficace de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

Exercice 2

Partie A

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n = -\dfrac{1}{n} \sin n\dfrac{\pi}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que
   $J_n = \dfrac{\pi}{2n} \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{n^2} \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{n^2}$
3. Déterminer I_1, I_2 et I_3, puis J_1, J_2 et J_3.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, & f(t) = \dfrac{2E}{\pi} t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}$$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ (on prendra $E = 2$ uniquement pour construire la courbe représentant f).
2. Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.
   (a) Calculer a_0.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de b_n.
   (c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
   Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

Partie C

1. Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3.
2. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a :
$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$
3. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :
$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$
   Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$.
   Calculer P, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\frac{P}{F^2}$.
   Ce dernier résultat très proche de 1*, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à* 3.

Exercice 3

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0;\pi]$ par
$$g(t) = (1+\cos^2 t)\sin^2 t.$$
   (a) Montrer que $g'(t) = 4\sin t\cos^3 t$.
   (b) En déduire les variations de g sur $[0~;~\pi]$.
2. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :
$$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & \frac{1}{2}-\tau & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ f(t) & = & -\tau & \text{si } \tau \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \frac{1}{2}$$
   (a) *Uniquement dans cette question, on prendra* $\tau = \frac{1}{6}$.
   Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1~;~1]$ dans un repère orthonormal.
   (b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
   Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
   Montrer que :
$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$$
3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
   Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$
   On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.
   (a) À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.
   (b) Montrer que $E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2}\,g(2\pi\tau)$.
4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 4 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que :

$$\begin{cases} \varphi(t) = t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & \text{si} \quad \pi \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$

On note $S(t)$ développement de Fourier associé à la fonction φ ; les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés $a_0,\ a_n,\ b_n$ où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 4\pi]$.
2. (a) Calculer a_0, la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.

   (b) On rappelle que pour une fonction f, périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que μ_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période est égal à $\dfrac{\pi^2}{6}$.
3. Montrer que. pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n = \dfrac{1}{\pi n^2}[\cos(n\pi) - 1]$.

   On admet que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on a : $b_n = -\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$.
4. On considère la fonction S_3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

   où les nombres $a_0,\ a_n\ , b_n$ sont les coefficients de Fourier associes à la fonction φ définie précédemment.

   (a) Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\dfrac{2}{9\pi}$	$\dfrac{1}{3}$

   (b) Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2}.
5. On rappelle la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3.

$$\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left[a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right]$$

   (a) Calculer la valeur exacte de μ_3^2.

   (b) Calculer la valeur approchée de $\dfrac{\mu_3^2}{\mu_{\text{eff}}^2}$ arrondie à 10^{-2}.